Εξέταση στο μάθημα Πραγματική Ανάλυση ΜΑΕ511
22 Ιανουαρίου 2018

1^o Θέμα (2 μονάδες)

Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου Lebesque στον n-διάστατο χώρο IR^n .Για να δώσετε τον ορισμό του n-διάστατου μέτρου Lebesque θα χρησιμοποιήσετε κάποιες μετροθεωρητικές έννοιες (π.χ μέτρο κ.τ.λ) και κάποιο θεώρημα . Να δώσετε τους ορισμούς όλων των εννοιών που θα χρησιμοποιήσετε, τη διατύπωση του θεωρήματος καθώς και τους ορισμούς όλων των μετροθεωρητικών εννοιών που εμπεριέχει το θεώρημα.

2^o Θέμα (2 μονάδες)

Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του IR^2 :

A = [-3 , 2] X [-1 , 4] , B = [-1 , 4] X [-2 , 2] και **Γ = [-2 , 3] X [-3 , 1]** .Να εξηγήσετε γιατί το σύνολο **AU(B \Γ)** είναι Lebesque μετρήσιμο και να υπολογίσετε το διδιάστατο μέτρο Lebesque του .

Σημείωση : Οποτεδήποτε χρησιμοποιείτε συνολοθεωρητικές ισότητες μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη .Επίσης, εφ' όσον γνωρίζετε, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο που δίνει το μέτρο της ένωσης και της διαφοράς δυο Lebesque μετρήσιμων συνόλων χωρίς απόδειξη .

3^o Θέμα (2 μονάδες)

Με ℕ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών . Έστω I , I_n , n ∈ ℕ, να είναι φραγμένα διαστήματα του IR^2 , ώστε το I να είναι υποσύνολο του συνόλου $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.Να δείξετε ότι : $V(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(I_n)$. **(2 μονάδες)**

4^o Θέμα (3 μονάδες)

A) Έστω (X, ρ) να είναι ένας μετρικός χώρος και $f_n : X \to IR$, n ∈ ℕ , και $f : X \to IR$, να είναι συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f_n , n ∈ ℕ είναι συνεχείς (ως προς τη μετρική ρ του X) και ότι η ακολουθία $f_n \to f$ ομοιόμορφα .Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής .**(1 μονάδα)**

B) Έστω χ, ψ να είναι δύο πραγματικοί αριθμοί . Θεωρούμε την σειρά πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} (\chi\psi)^n$$

Να δείξετε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει .Έτσι ορίζεται καλά η συνάρτηση

$f : IR^2 \rightarrow IR$, με τύπο : $f((\chi,\psi)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} (\chi\psi)^n$ για κάθε $(\chi,\psi) \in IR^2$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής . **(1 μονάδα)**

Γ) Έστω χ να είναι ένας πραγματικός αριθμός .Θεωρούμε την σειρά πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2018}}{(3n+1)!} \chi^n$$

Να δείξετε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει .Έτσι ορίζεται καλά η συνάρτηση

$F : [0,2018] \rightarrow IR$, με τύπο :

$F(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2018}}{(3n+1)!} \chi^n$, για κάθε $\chi \in [0,2018]$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι Riemann ολοκληρώσιμη και να γράψετε τον αριθμό

$$\int_0^{2018} F(\chi)d\chi$$

σαν άθροισμα μιας συγκεκριμένης σειράς πραγματικών αριθμών της μορφής

$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ για συγκεκριμένη ακολουθία β_n , $n \in \mathbb{N}$. **(1 μονάδα)**

Σημείωση :Στο παραπάνω 4° θέμα να δικαιολογείτε λεπτομερώς τον κάθε ισχυρισμό που αναφέρετε .

5° Θέμα (1 μονάδα)

Δίνεται η συνάρτηση: , $f : [1,2] \rightarrow IR$, με τύπο :

$f(x) = e^{\sin(2018x)+x^2}$, για κάθε $x \in [1,2]$. Έστω ε=0,000001 .

Να προσδιορίσετε ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο p για το οποίο να ισχύει :

$|f(x)-p(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Καλή επιτυχία